TD 1 - Rappels

On utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{C}$ est muni des operations de somme $+$ et produit $\cdot$ qui lui donnent la structure de corps commutatif.
- Parfois $\mathbb{C}$ sera consideré avec sa structure d'espace vectoriel réel de dimension 2, ou complexe de dimension 1.
- $\mathbb{C}$ sera aussi muni de la topologie standard, associée à la valeur absolue.
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ désigne le disque unité.
- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

Questions de cours.

(a) Rappeler les définitions de e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\tan z$, où z est une variable complexe.

(b) Rappeler les définitions de ouvert et de fermé de $\mathbb{C}$.

(c) Soit $E \subseteq \mathbb{C}$ une partie du plan complexe. Donner la définition de partie intérieure, adhérence, frontière, point d'accumulation de E.

(d) Soit $E \subseteq \mathbb{C}$ une partie non vide du plan complexe. Donner la définition de topologie induite sur E.

(e) Donner la définition de partie compacte, connexe, connexe par arcs du plan complexe.

(f) Donner la définition de série entière. Que veut dire que la série converge en un valeur z_0 ?

(g) Donner la définition de rayon de convergence d'une série entière.

Nombres complexes

Exercice 1. Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ un nombre complexe en sa forme algébrique. Rappeler la définition de $\cos z$ et $\sin z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et exprimer partie réelle, partie imaginaire et module de $\cos z$ et $\sin z$ en fonction de x, y.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(a) $e^z = a$, avec $a \in \mathbb{C}$ donné.

(b) $\cos(3z) = \mathrm{i}$.

(c) $\tan(z) = \mathrm{i}$.

(d) $\cos(az) = 0$, avec $a \in \mathbb{C}$ donné.

(e) $\sin(az) = 0$, avec $a \in \mathbb{C}$ donné.

(f) $(z-1)^n = (z+1)^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) $z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1 = 0$.

(h) $z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 3z^2 + 2z - 1 = 0$.

Exercice 3. À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'équation $az + b\bar{z} + c = 0$ détermine une droite affine du plan ?

Exercice 4. Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, l'ensemble des points du plan cartésien d'affixe z vérifiant les conditions suivantes :

(a) $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(1/z) = r\}$, avec $r \in \mathbb{R}$.

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 \in \mathbb{R} \text{ et } z^3 \leq 8\}$.

(c) $C = \left\{\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \mid z \in \mathbb{H}\right\}$.

(d) $D_a = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1\right\}$, pour $a \in \mathbb{D}$.

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-\mathrm{i}|\}$.

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \bar{z}^2 = 2\}$.

Exercice 5. Interpréter géométriquement les applications suivantes définies sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Déterminer également si elles sont $\mathbb{R}$-linéaires/affines (resp., $\mathbb{C}$-linéaires/affines).

(a) $f(z) = \bar{z}$,

(b) $g(z) = \mathrm{i}\bar{z} - \mathrm{i} + 1$,

(c) $h(z) = \mathrm{j}z + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, où $\mathrm{j} = e^{2\mathrm{i}\pi/3}$,

(d) $k_a(z) = az$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Topologie du plan complexe

Exercice 6. Pour les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$, déterminer s'ils sont ouvert/fermés, compacts, connexes. Déterminer la partie intérieure, adhérence, frontière, et les points d'accumulation. Les dessiner dans le plan cartésien.

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 2\}$.

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + \operatorname{Im}(z^2) > 0\}$.

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| = 1\}$.

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| = \operatorname{Im}(z) + 1\}$.

(g) $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) = 2\}$.

(h) $H = \{\arctan(t)e^{\mathrm{i}t} \mid t \in \mathbb{R}_+\}$.

(i) $I = \{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| = \frac{1}{2}\}$.

(j) $J = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{3}\right\}$.

(k) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(l) $L = \{x + \mathrm{i}y \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

(m) $M = \mathbb{D} \cup \{1, 2\mathrm{i}\}$.

(n) $N = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\}$.

Séries entières

Exercice 7. Quel est le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$? Calculer la somme pour tout z dans le disque ouvert de centre 0 et rayon ρ.

Exercice 8. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$, $a \in \mathbb{C}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + r^n}{n} z^n$, $r > 0$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n!} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^{n!}$,

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$,

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{n \sin(n)} z^n$.

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $a_0 = 3$ et a_n est la n-ième chiffre décimale de π.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $a_n = \begin{cases} \frac{(-2)^m}{m+1} & \text{si } n = 3m+1, m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(j) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, telle que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Exercice 9 (Abel). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge en un point $z_0 \neq 0$. Montrer que alors $f(z)$ converge (absoluement) pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Exercice 10. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme f. Estimer et si possible déterminer les rayons de convergence et exprimer leurs sommes en fonction de f dans les cas suivants :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n z^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$, où $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$,

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^n$,

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, où $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Exercice 11. Soit a_n définie par récurrence par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n$.

(a) Que peut-on dire de la suite $(a_n/n^2)_{n \geq 1}$?

(b) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Exercice 12. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières définies par les suites suivantes :

(a) $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$

(b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(c) $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$.